Martin-Löf type theory

Petr Pudlák

MFF

7. ledna 2010

Osnova

Netypovaný lambda kalkulus

Konstrukce termů

Pravidla konstrukce termů:

Proměnné: Libovolná proměnná je term.

Abstrakce: Je-li M term a x proměnná, pak $\lambda x.M$ je term.

Aplikace: Jsou-li M a N termy pak MN je term.

Netypovaný lambda kalkulus

Redukce termů

α-redukce – přejmenování proměnných.

β-redukce – hlavní redukční princip lambda kalkulu

$$(\lambda x.M)N \longrightarrow M[N/x]$$

η-redukce – princip extensionality:

$$\lambda x.Mx \longrightarrow M$$

kde x není volné v M.

Typované lambda kalkuly

Motivace – dozvědět se něco o termech, například zda jsou *terminující*.
Například definujeme-li $\Omega \equiv \lambda x.xx$ pak $\Omega\Omega \longrightarrow^{\beta} \Omega\Omega$, čili posloupnost redukcí je nekonečná.
Viz. Henk Barendregt, *Lambda Calculi with Types*, Handbook of Logic in Computer Science, Volume II, Oxford University Press.

Kombinatorický kalkulus

Konstrukce termů

Pravidla konstrukce termů:

Proměnné: Libovolná proměnná je term.

Elementární kombinátory: Je-li M elementární kombinátor, pak M je term.

Aplikace: Jsou-li M a N termy pak MN je term.

[1] Místo $(\ldots((Mx_1)x_2)\ldots x_n)$ píšeme $Mx_1\ldots x_n$.

Kombinatorický kalkulus

Konstrukce termů

Pravidla konstrukce termů:

Proměnné: Libovolná proměnná je term.

Elementární kombinátory: Je-li M elementární kombinátor, pak M je term.

Aplikace: Jsou-li M a N termy pak MN je term.

Pro každý elementární kombinátor je definováno redukční pravidlo ve tvaru[1]

$$Mx_1 \ldots x_n \longrightarrow E$$

kde term E obsahuje pouze proměnné z množiny $x_1, \ldots, x_n$.

[1] Místo $(\ldots((Mx_1)x_2)\ldots x_n)$ píšeme $Mx_1 \ldots x_n$.

Kombinatorický kalkulus

Používané kombinátory

$$
\begin{aligned}
Ix &\longrightarrow x \\
Kxy &\longrightarrow x \\
Sxyz &\longrightarrow xz(yz)
\end{aligned}
$$

Kombinatorický kalkulus

Používané kombinátory

$$
\begin{aligned}
Ix &\longrightarrow x \\
Kxy &\longrightarrow x \\
Sxyz &\longrightarrow xz(yz) \\
Yg &\longrightarrow g(Yg)
\end{aligned}
$$

Úplnost S-K báze

Theorem

Každý lambda term lze převést na term složený pouze z kombinátorů S a K.

Úplnost S-K báze

Theorem

Každý lambda term lze převést na term složený pouze z kombinátorů S a K.

Důkaz:

$$
\begin{aligned}
T[x] &= x \\
T[(E_1 E_2)] &= (T[E_1]T[E_2]) \\
T[\lambda x.E] &= (KT[E]) \quad (\text{není-li } x \text{ volné v } E) \\
T[\lambda x.x] &= I \\
T[\lambda x.\lambda y.E] &= T[\lambda x.T[\lambda y.E]] \quad (\text{je-li } x \text{ volné v } E) \\
T[\lambda x.(E_1 E_2)] &= (ST[\lambda x.E_1]T[\lambda x.E_2])
\end{aligned}
$$

Úplnost S-K báze

Složitost

Poznámka

V nejhorším případě může konverze termu délky n mít délku až $\Theta(3^n)$.

Toto lze zlepšit použitím η-konverze a použitím více kombinátorů. Viz.

`http://en.wikipedia.org/wiki/Combinatory_logic#Completeness_of_the_S-K_basis.`

Souvislost s lambda kalkulem

Můžeme zadefinovat elementární kombinátory pomocí abstrakce a aplikace:

$$\begin{aligned} I &= \lambda x.x \\ K &= \lambda xy.x \\ S &= \lambda xyz.(xz(yz)). \\ &\vdots \end{aligned}$$

Poté pracujeme pouze s aplikací, bez abstrakce.

Souvislost s lambda kalkulem

Můžeme zadefinovat elementární kombinátory pomocí abstrakce a aplikace:

$$\begin{aligned} I &= \lambda x.x \\ K &= \lambda xy.x \\ S &= \lambda xyz.(xz(yz)). \\ &\vdots \end{aligned}$$

Poté pracujeme pouze s aplikací, bez abstrakce.

Někdy (například ve funkcionálním programování) se též setkáme s obecnější definicí:

Definice

Kombinátor je lambda term bez volných proměnných.

Osnova

Souvislost s axiomy VL

Přiřadíme-li nejobecnější typy kombinátorům[2], dostaneme:

I	$\lambda x.x$	$A \to A$
K	$\lambda xy.x$	$A \to (B \to A)$
S	$\lambda xyz.(xz(yz))$	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

[2] V GHCi lze nechat odvodit např. typ S kombinátoru takto:

```
> :t (let s x y z = (x z) (y z) in s)
```

Souvislost s axiomy VL

Přiřadíme-li nejobecnější typy kombinátorům[2], dostaneme:

I	$\lambda x.x$	$A \to A$
K	$\lambda xy.x$	$A \to (B \to A)$
S	$\lambda xyz.(xz(yz))$	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Pozorování (Curry 1934): Typy kombinátorů K a S vypadají stejně jako axiomy ICI (intuicionistického kalkulu implikace) podle Łukasiewicze. Pravidlo Modus Ponens $A \to B, A \vdash B$ odpovídá odvození typu při aplikaci: jestliže $M : A \to B$ a $N : A$ pak $MN : B$.

[2] V GHCi lze nechat odvodit např. typ S kombinátoru takto:

```
> :t (let s x y z = (x z) (y z) in s)
```

Curry–Howardova korespondence

- Typy odpovídají (výrokovým) intuicionistickým tvrzením.
- Lambda termy odpovídají důkazům.
- Dokazatelná tvrzení odpovídají obydleným typům.
  Přirozeně, tvrzení je dokazatelné, pokud existuje alespoň jeden jeho důkaz.

Curry–Howardova korespondence

- Typy odpovídají (výrokovým) intuicionistickým tvrzením.
- Lambda termy odpovídají důkazům.
- Dokazatelná tvrzení odpovídají obydleným typům.
  Přirozeně, tvrzení je dokazatelné, pokud existuje alespoň jeden jeho důkaz.

Poznámka

Je důležité si uvědomit, že pracujeme pouze s totálními funkcemi. Jinak by se mohlo stát, že bychom aplikací funkce na term (důkaz), pro který není definována, mohli dokázat neobydlený typ (nepravdivé tvrzení). Speciálně, pokud bychom povolili částečně definované funkce, mohli bychom mít

$$f : \top \to \bot$$

Lambda termy jako důkazy

Pravidlo Modus Ponens:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

Aplikace lambda termů:

$$\frac{M : (A \to B) \qquad N : A}{MN : B}$$

Lambda termy jako důkazy

Pravidlo Modus Ponens:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

Termy popisují důkazy.

Aplikace lambda termů:

$$\frac{M : (A \to B) \qquad N : A}{MN : B}$$

Lambda termy jako důkazy

Pravidlo Modus Ponens:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

Aplikace lambda termů:

$$\frac{M : (A \to B) \qquad N : A}{MN : B}$$

Termy popisují důkazy.

Například v kombinatorické logice kombinátory S a K:

- K reprezentuje axiom $A \to (B \to A)$
- S reprezentuje axiom $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- pro dva termy
  - M dokazující $(A \to B)$ a
  - N dokazující A

  reprezentuje term MN důkaz B.

Příklad

Důkaz $A \to A$

Hledáme term, jehož typ bude $A \to A$.

[3] Závorkujeme zleva, takže $SKK = (SK)K$.

[4] To zároveň ukazuje, že kombinátor $I : A \to A$ je redundantní vzhledem k S a K.

Příklad

Důkaz $A \to A$

Hledáme term, jehož typ bude $A \to A$.

$$S: \quad (A \to (\underbrace{(E \to A)}_{B} \to \underbrace{A}_{C})) \to ((A \to \underbrace{(E \to A)}_{B}) \to (A \to \underbrace{A}_{C}))$$

$$K: \quad A \to (\underbrace{(E \to A)}_{B} \to A)$$

[3] Závorkujeme zleva, takže $SKK = (SK)K$.

[4] To zároveň ukazuje, že kombinátor $I : A \to A$ je redundantní vzhledem k S a K.

Příklad

Důkaz $A \to A$

Hledáme term, jehož typ bude $A \to A$.

$$S: \quad (A \to (\underbrace{(E \to A)}_{B} \to \underbrace{A}_{C})) \to \quad ((A \to \underbrace{(E \to A)}_{B}) \to \quad (A \to \underbrace{A}_{C}))$$

$$K: \quad A \to (\underbrace{(E \to A)}_{B} \to A)$$

$$SK: \qquad\qquad\qquad\qquad (A \to (E \to A)) \to \quad (A \to A)$$

[3] Závorkujeme zleva, takže $SKK = (SK)K$.

[4] To zároveň ukazuje, že kombinátor $I : A \to A$ je redundantní vzhledem k S a K.

Příklad

Důkaz $A \to A$

Hledáme term, jehož typ bude $A \to A$.

$$S: \quad (A \to (\underbrace{(E \to A)}_{B} \to \underbrace{A}_{C})) \to ((A \to \underbrace{(E \to A)}_{B}) \to (A \to \underbrace{A}_{C}))$$

$$K: \quad A \to (\underbrace{(E \to A)}_{B} \to A)$$

$$SK: \quad (A \to (E \to A)) \to (A \to A)$$

$$K: \quad A \to (\underbrace{E}_{B} \to A)$$

[3] Závorkujeme zleva, takže $SKK = (SK)K$.

[4] To zároveň ukazuje, že kombinátor $I : A \to A$ je redundantní vzhledem k S a K.

Příklad

Důkaz $A \to A$

Hledáme term, jehož typ bude $A \to A$.

$$S: \quad (A \to (\underbrace{(E \to A)}_{B} \to \underbrace{A}_{C})) \to ((A \to \underbrace{(E \to A)}_{B}) \to (A \to \underbrace{A}_{C}))$$

$$K: \quad A \to (\underbrace{(E \to A)}_{B} \to A)$$

$$SK: \quad (A \to (E \to A)) \to (A \to A)$$

$$K: \quad A \to (\underbrace{E}_{B} \to A)$$

$$SKK: \quad A \to A$$

[3] Závorkujeme zleva, takže $SKK = (SK)K$.

[4] To zároveň ukazuje, že kombinátor $I : A \to A$ je redundantní vzhledem k S a K.

Příklad

Důkaz $A \to A$

Hledáme term, jehož typ bude $A \to A$.

$$S: \quad (A \to (\underbrace{(E \to A)}_{B} \to \underbrace{A}_{C})) \to ((A \to \underbrace{(E \to A)}_{B}) \to (A \to \underbrace{A}_{C}))$$

$$K: \quad A \to (\underbrace{(E \to A)}_{B} \to A)$$

$$SK: \quad (A \to (E \to A)) \to (A \to A)$$

$$K: \quad A \to (\underbrace{E}_{B} \to A)$$

$$SKK: \quad A \to A$$

Term SKK[3] je tedy důkazem tvrzení $A \to A$ [4].

(Ukázat příklad v GHCi.)

[3] Závorkujeme zleva, takže $SKK = (SK)K$.

[4] To zároveň ukazuje, že kombinátor $I : A \to A$ je redundantní vzhledem k S a K.

Osnova

Konstruktivismus v matematice

Konstruktivismus se řídí myšlenkou, že, důkaz existence objektu musí tento objekt sestrojit.

Příklady konstruktivistických směrů v matematice:

intuicionistická logika – viz. dále.

finitismus – až do extrému: všechny existující objekty jsou konstruovány konečným počtem kroků pouze z přirozených čísel.
Leopold Kronecker: "God created the natural numbers, all else is the work of man.";

konstruktivní analýza – zpracování matematická analýzy konstruktivně;

konstruktivní teorie množin – například IZF.

Ne-konstruktivismus v matematice

Princip vyloučeného třetího $P \vee \neg P$, alternativně implikací

$$(\psi \to \chi) \to ((\neg\psi \to \chi) \to \chi)$$

Eliminace dvojité negace $\neg\neg P \to P$

Piercův zákon $((\psi \to \chi) \to \psi) \to \psi$

Ne-konstruktivismus v matematice

Princip vyloučeného třetího $P \vee \neg P$, alternativně implikací
$(\psi \to \chi) \to ((\neg\psi \to \chi) \to \chi)$

Eliminace dvojité negace $\neg\neg P \to P$

Piercův zákon $((\psi \to \chi) \to \psi) \to \psi$

Existence nespočetných množin

Axiom výběru – z principu nekonstruktivní,

Königovo lemma – má nekonstruktivní důkaz,

Teorie míry – existence neměřitelných množin
(Vitaliho věta – důsledek axiomu výběru),
Banach-Tarského paradox.

Intuicionistická logika

Logický kalkulus řídící se konstruktivismem. Je základem pro mnoho dalších konstruktivistických teorií.

Intuicionistická logika

Logický kalkulus řídící se konstruktivismem. Je základem pro mnoho dalších konstruktivistických teorií.

V intuicionistické logice zejména platí:

- Je-li $F \vee G$ dokazatelné, pak musí být buďto F nebo G dokazatelné.
- Dokážeme-li uzavřenou formuli $(\exists x)\phi(x)$, musíme být schopni nalézt term t takový, že platí $\phi(t)$.
- Nelze použít důkaz sporem (souvisí s eliminací dvojité negace).
  Myšlenka:
  Mít důkaz, že nelze dokázat $\neg A$ není totéž jako mít důkaz A.
  V intuicionistické logice můžeme dokázat

$$\frac{A \vdash \bot}{\neg A} \quad \text{resp.} \quad \frac{\neg A \vdash \bot}{\neg\neg A}$$

  avšak nikoliv

$$\frac{\neg A \vdash \bot}{A}$$

Souvislost klasické a intuicionistické logiky

Souvislost klasické a intuicionistické logiky

Na intuicionistickou logiku lze nahlížet jako na podmnožinu klasické logiky; klasickou logiku získáme přidáním např. principu vyloučeného třetího nebo eliminace dvojité negace.

Souvislost klasické a intuicionistické logiky

Na intuicionistickou logiku lze nahlížet jako na podmnožinu klasické logiky; klasickou logiku získáme přidáním např. principu vyloučeného třetího nebo eliminace dvojité negace.
Na intuicionistickou logiku lze nahlížet jako na nadmnožinu klasické logiky; *Gödel–Gentzen negative translation* – predikátovou klasickou logiku lze vnořit do predikátové intuicionistické logiky;
speciálně ve výrokovém případě (Glivenkova věta) platí, že je-li tvrzení P dokazatelné v klasické logice, je $\neg\neg P$ dokazatelné v intuicionistické logice.

Implikativní axiomatizace v Hilbertově stylu

Pravidlo Modus Ponens, substituce za výrokové proměnné a axiomy:

$$\text{PL1} \quad : \quad A \to (B \to A)$$

$$\text{PL2} \quad : \quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

Implikativní axiomatizace v Hilbertově stylu

Pravidlo Modus Ponens, substituce za výrokové proměnné a axiomy:

$$\begin{aligned} \text{PL1} &: A \to (B \to A) \\ \text{PL2} &: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \end{aligned}$$

Negace pomocí dalšího symbolu $\bot$ pro kontradikci a axiomu:

$$\text{FALSE} : \bot \to A$$

Pak lze zadefinovat

$$\neg A \equiv A \to \bot$$

Implikativní axiomatizace v Hilbertově stylu

Pravidlo Modus Ponens, substituce za výrokové proměnné a axiomy:

$$\begin{aligned} \text{PL1} &: A \to (B \to A) \\ \text{PL2} &: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \end{aligned}$$

Negace pomocí dalšího symbolu $\bot$ pro kontradikci a axiomu:

$$\text{FALSE} : \bot \to A$$

Pak lze zadefinovat

$$\neg A \equiv A \to \bot$$

Negace se chová jinak než v klasické logice. Například

$$\vdash A \to \neg\neg A$$

ale

$$\nvdash \neg\neg A \to A$$

(Ukázat v E-proveru.)

Například nelze dokázat:

Axiomatizace dalších spojek

Na rozdíl od klasické logiky nelze jednoduše dodefinovat další spojky jako zkratky pro výrazy z implikace a negace!
Podobně s kvantifikátory: Nelze zadefinovat

$$(\exists x)P(x) \equiv \neg(\forall x)\neg P(x),$$

protože tím bychom umožnili nekonstruktivní důkaz existence.

Axiomatizace dalších spojek

MP	$\phi, \phi \to \psi \vdash \psi$
PL-1	$\phi \to (\chi \to \phi)$
PL-2	$(\phi \to (\chi \to \psi)) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi))$
AND-1	$\phi \wedge \chi \to \phi$
AND-2	$\phi \wedge \chi \to \chi$
AND-3	$\phi \to (\chi \to (\phi \wedge \chi))$
OR-1	$\phi \to \phi \vee \chi$
OR-2	$\chi \to \phi \vee \chi$
OR-3	$(\phi \to \psi) \to ((\chi \to \psi) \to (\phi \vee \chi \to \psi))$
FALSE	$\bot \to \phi$

Axiomatizace dalších spojek

MP $\phi, \phi \to \psi \vdash \psi$

PL-1 $\phi \to (\chi \to \phi)$

PL-2 $(\phi \to (\chi \to \psi)) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi))$

AND-1 $\phi \wedge \chi \to \phi$

AND-2 $\phi \wedge \chi \to \chi$

AND-3 $\phi \to (\chi \to (\phi \wedge \chi))$

OR-1 $\phi \to \phi \vee \chi$

OR-2 $\chi \to \phi \vee \chi$

OR-3 $(\phi \to \psi) \to ((\chi \to \psi) \to (\phi \vee \chi \to \psi))$

FALSE $\bot \to \phi$

V predikátové logice přidáme:

$\forall$-GEN $\psi \to \phi \vdash \psi \to ((\forall x)\phi)$, není-li x volné v ψ,

$\exists$-GEN $\phi \to \psi \vdash ((\exists x)\phi) \to \psi$, není-li x volné v ψ.

PRED-1 $((\forall x)\phi(x)) \to \phi(t)$, jestliže žádný volný výskyt x v ϕ není pod kvantifikátorem proměnné vyskytující se v t

PRED-2 $\phi(t) \to ((\exists x)\phi(x))$, za stejných podmínek jako PRED-1.

Semantika

Heytingovy algebry – rozšíření Booleových algeber.

Kripkeho rámce

Poznámka ke Genzenově kalkulu

Pokud se v Genzenově kalkulu (LK) omezíme pouze na sekventy, mající na pravé straně pouze jednu formuli (a upravíme patřičně odvozovací pravidla), dostaneme důkazový systém pro intuicionistickou logiku.
Genzen nazval tento systém LJ
To odpovídá vypuštění principu vyloučeného třetího:
v klasické logice můžeme odvodit

$$\vdash P \vee \neg P$$

či odpovídající sekvent

$$\vdash P, \neg P$$

v intuicionistické ne.

Osnova

Přirozená dedukce (natural deduction)

- Logický kalkulus "ušitý na míru" pro intuicionistickou logiku.
- Snaha je zachytit uvažování o tvrzeních způsobem bližším myšlení matematika.
- Místo vícero axiomů a malého počtu odvozovacích pravidel, máme pro každou spojku zvláštní odvozovací pravidla
  - zavedení (introduction) a
  - eliminace.
- Pravidla pro jednotlivé spojky jsou nezávislá (ortogonální), takže lze přidávat/ubírat jednotlivé spojky a zkoumat vzniklé logické systémy.
- (Díky tomu) lze hovořit o tzv.
  - lokální korektnosti a
  - lokální úplnosti

  logického systému pro jednotlivé spojky.

Přirozená dedukce (natural deduction)

- Logický kalkulus "ušitý na míru" pro intuicionistickou logiku.
- Snaha je zachytit uvažování o tvrzeních způsobem bližším myšlení matematika.
- Místo vícero axiomů a malého počtu odvozovacích pravidel, máme pro každou spojku zvláštní odvozovací pravidla
  - zavedení (introduction) a
  - eliminace.
- Pravidla pro jednotlivé spojky jsou nezávislá (ortogonální), takže lze přidávat/ubírat jednotlivé spojky a zkoumat vzniklé logické systémy.
- (Díky tomu) lze hovořit o tzv.
  - lokální korektnosti a
  - lokální úplnosti

  logického systému pro jednotlivé spojky.
- Důkazy v přirozené dedukci jsou isomorfní lambda termům.
- Je základem pro typovou teorii Per Martin-Löfa.

Soudy (jugments) o formulích

V Hilbertově stylu máme pouze jeden soud (judgment) o formulích – formule je (nebo není) pravdivá.
V přirozené dedukci je hlavním soudem

> *Formule C je pravdivá (zn. C true) za předpokladů*
> A_1 *true*, ... A_n *true.*

Čili, formule je pravdivá v rámci nějakého kontextu.
Lze na to nahlížet jako na sekvent s libovolným počtem premis a jedním závěrem.

Soudy (jugments) o formulích

Soud

> *formule C je pravdivá (zn. P true) za předpokladů A_1 true, ... A_n true.*

lze myšlenkově rozdělit na

- A_i je předpoklad a
- C true.

Strukturální pravidla

Hypothesis [5]

$$\frac{A \text{ true}}{A \text{ true}}$$

Weakening: Předpoklady nemusí být použity – lze přidávat redundantní předpoklady.

Duplication: Předpoklady lze používat vícekrát. [6]

Exchange: Pořadí předpokladů je irelevantní.

[5] Opačnou myšlenku zachycuje pravidlo řezu v Genzenově kalkulu (které je redundantní – Hauptsatz).

[6] V některých logických kalkulech to takto být nemusí, např. lineární logika.

Přirozená dedukce

Viz. `http://www.cs.cmu.edu/~fp/courses/atp/handouts/ch2-natded.pdf`.

Lokální korektnost a β-redukce

$(\lambda u.M)N \rightarrow_\beta [N/u]M$

Lokální korektnost a β-redukce

$(\lambda u.M)N \rightarrow_\beta [N/u]M$

Důkaz

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, u : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda u : A.M) : A \supset B} \supset I^u \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash (\lambda u : A.M)N : B} \supset E$$

Lokální korektnost a β-redukce

$(\lambda u.M)N \rightarrow_\beta [N/u]M$

Důkaz

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, u : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda u : A.M) : A \supset B} \supset I^u \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash (\lambda u : A.M)N : B} \supset E$$

se redukuje na

$$\dfrac{\Gamma, u : A \vdash M : B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash [N/u]M : B} \text{ substituce } [N/u]$$

Lokální korektnost a β-redukce

$(\lambda u.M)N \rightarrow_\beta [N/u]M$

Důkaz

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, u : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda u : A.M) : A \supset B} \supset I^u \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash (\lambda u : A.M)N : B} \supset E$$

se redukuje na

$$\dfrac{\Gamma, u : A \vdash M : B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash [N/u]M : B} \text{ substituce } [N/u]$$

(Což je vlastně věta o substituci pro přirozenou dedukci - důkaz strukturální indukcí na M.)

(Balíček pro psaní důkazových stromů od Sam Busse: `bussproofs.sty`.)

Lokální úplnost a η-expanze

$M \to_\eta (\lambda u.M)u$

Lokální úplnost a η-expanze

$M \to_\eta (\lambda u.M)u$

Tvrzení

$$\Gamma \vdash M : A \supset B$$

expanduje na

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash M : A \supset B \qquad \Gamma, u : A \vdash u : A}{\Gamma, u : A \vdash Mu : B}\supset E}{\Gamma \vdash (\lambda u : A.M)u : A \supset B}\supset I^u$$